No. Date 1/11/17

Απ. 1.

Περί του αριθμού e

Θεωρούμε τις ακολουθίες $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

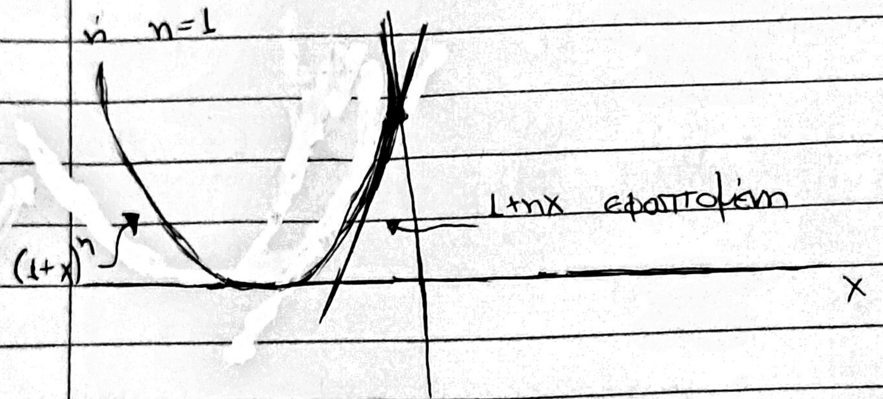
α) Θ.δ.ο. $a_n \uparrow$ και $b_n \searrow$

Παρατήρηση: Πως δείχνουμε ότι μια ακολουθία (c_n) είναι $\uparrow$;

- δείχνω ότι $c_{n+1}-c_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$
- Αν $c_n>0$, τότε μπορώ να δω και το πηλίκο $\frac{c_{n+1}}{c_n}>1$

Ανισότητα Bernoulli

$(1+x)^n \geq 1+nx$, $x\geq -1$, $n\in\mathbb{N}$ και ισότητα έχω μόνο αν $x=0$ ή $n=1$



$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n}=$$

$$=\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=\left(\frac{n\cdot(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n}>\left(1-(n+1)\cdot\frac{1}{(n+1)^2}\right)\cdot\frac{n+1}{n}=1$$

Εφαρμόζω Bernoulli
$n\to n+1$
$x=-\frac{1}{(n+1)^2}>1$

- Με αυστηρή ανισότητα

Παρατηρήσεις: • Κάνω ίδιους εκθέτες. Κατά προτίμηση το μεγαλύτερο $n+1$.

Άρα η a_n είναι γνησίως αύξουσα

$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Θ.δ.ο. $b_n \searrow$

Θ.δ.ο. $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$ και επειδή b_n έχει θετικούς όρους σημαίνει ότι θα είναι $\searrow$

Άρα $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} \frac{n}{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \frac{n}{n+1} =$

$= \left(\frac{n^2+2n+1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} > \left(1 + (\cancel{n+2}) \frac{1}{n(\cancel{n+2})}\right) \cdot \frac{n}{n+1} =$

$= 1$

Αυτό το κλάσμα είναι μεγαλύτερο της μονάδας για κάθε n. και επειδή τα b_n είναι θετικά έπεται ότι b_n είναι γνησίως φθίνουσα

β) Θ.δ.ο. $(a_n), (b_n)$ είναι φραγμένη και έχουν το ίδιο όριο

- Αφού $(a_n) \uparrow$ έχουμε $a_n \geq a_1 = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Αφού $(b_n) \searrow$ έχουμε $b_n \leq b_1 = 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Φανερά $a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Άρα $2 \leq a_n < b_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Αφού οι a_n και b_n είναι μονότονες και φραγμένες συγκλίνουν

Άρα $a_n \to \ell_1$

$b_n \to \ell_2$

No. Date

Απομένει να δείξω ότι $l_1 = l_2$

$$\underbrace{b_n}_{\to l_2} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1}\underbrace{a_n}_{\to l_1}$$ (από άλγεβρα ορίων)

<u>Ορισμός</u>: Το κοινό όριο των a_n και b_n ονομάζεται e

Αφού $2 \leq a_n < 4$ $n \geq 1$

$\rightsquigarrow$ $2 \leq e \leq 4$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω (a_n) ακολουθία με $a_n > 0$ τ.ω. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$ με $l<1$

$\rightsquigarrow$ $a_n \to 0$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $r \in (l, 1)$

Από ορισμό $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$ με $\epsilon = r - l > 0$

$\rightsquigarrow$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < r - l$, $n \geq n_0$

$\rightsquigarrow$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$ $n \geq n_0$ (από αντίστροφη τριγωνική ανισότητα)

Άρα για $n \geq n_0$: $a_{n+1} < r \cdot a_n < r^2 a_{n-1} < \dots < r^{n-n_0+1} \cdot a_{n_0}$

$a_{n+1} < r a_n$

$a_n < r a_{n-1}$

$a_{n-1} < r a_{n-2}$ $\curvearrowright$ $a_{n+1} < r^{n-n_0+1} \cdot a_{n_0}$

$\dots$

$a_{n_0+1} < r a_{n_0}$

Θέτω $c = a_{n_0} r^{-n_0+1}$

$0 < a_{n+1} < c \cdot r^n$ $n \geq n_0$

$0 < r < 1$

[Από τα χαρακτηριστικά όρια: Αν $|w| < 1 \Rightarrow w^n \to 0$
$w^2 < w$]

$a_n = w^n$ με $0 < w < 1$

$a_{n+1} = w a_n < a_n$ $\qquad l = l \cdot w$

$\downarrow l \quad \downarrow wl \qquad a_n \to l > 0 \qquad \rightsquigarrow l(1-w) = 0$

Η a_n γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0 άρα
Άρα συγκλίνει σε κάποιο $l > 0$

Άσκηση: Ο.δ.ο. $a_n = \frac{n}{2^n} \to 0$ (Εφαρμόζω το προηγούμενο κριτήριο)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} < 1$$

Από θεώρημα $a_n \to 0$

Άσκηση: $\frac{2^{3n}}{3^{2n}} \to 0$ και $n^2 a^n \to 0$ με $|a| < 1$

Ν.δ.ο. $a_n = 2^n$ δεν συγκλίνει

Έστω ότι συνέκλινε $\to$ άτοπο
Αν συνέκλινε τότε θα ήταν φραγμένη

$\exists \theta > 0$ τ.ω. $2^n \leq \theta \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Από Bernouli $1 + n \leq 2^n \leq \theta$
Άρα $n \leq \theta - 1$, $\forall n$
Άρα $\exists$ σταθερά που φράσσει τους φυσικούς $\Rightarrow$ άτοπο

No. Date

Άσκηση: Ν.δ.ο. $n^{\frac{1}{n^2}} \to 1$

$n \leq n^2 \quad n \in \mathbb{N}$

$\rightsquigarrow \quad 1 \leq n^{1/n^2} \leq (n^2)^{1/n^2}$

Αν δείξω ότι $\lim (n^2)^{1/n^2}$ είναι 1 τότε προκύπτει το ζητούμενο.

$(n^2)^{1/n^2} \to$

Θέτω $m = n^2$

όταν $n \to \infty \rightsquigarrow m \to \infty$

$1 = \lim\limits_{m\to\infty} m^{1/m} = \lim\limits_{n\to+\infty} (n^2)^{1/n^2}$

Σπίτι

Άσκηση: Ν.δ.ο. $(n!)^{1/n^2} \to 1$ (Με κριτήριο παρεμβολής)

$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{4}(2a_n + 3)$

$a_2 = \frac{1}{4}(2+3) = 5/4$

$a_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{2} + 3\right) = \frac{11}{8}$

Πιθανώς $a_n < 2$. ⊛

Για $n = 1 \quad a_1 = 1 < 2$, άρα ⊛ ισχύει

Έστω ⊛ ισχύει για $n = k$, δηλαδή $a_k < 2$

Θ.δ.ο. ⊛ ισχύει για $n = k+1$.

$a_{k+1} = \frac{1}{4}(2a_k + 3) < \frac{1}{4}(2 \cdot 2 + 3) = \frac{7}{4} < 2$

$a_{n+1} > a_n$ ⊛

No. Date

Για $n=1$ έχω $a_2=\frac{10}{8}$, $a_1=1$ ✓.

$\rightsquigarrow$ (*) ισχύει για $n=1$.

Έστω ότι ισχύει για $n=k$, δηλαδή $a_{k+1}>a_k$

$a_{k+2}-a_{k+1}=\frac{1}{4}(2a_{k+1}+3)-\frac{1}{4}(2a_k+3)=\frac{1}{2}(a_{k+1}-a_k)>0$

Άρα αφού $a_n<2$ και a_n γνησίως αύξουσα

$\rightsquigarrow$ $a_n\to l$

Αφού $1\le a_n<2$

$\rightsquigarrow$ $1\le l\le 2$

$a_n\to l \rightsquigarrow a_{n+1}\to l$

$l=\frac{1}{4}(2l+3) \rightsquigarrow l=\frac{3}{2}$

Σπίτι 2/2 Άσκηση: $a_1=1$ $a_{n+1}=\sqrt{2\cdot a_n}$ $n\ge 1$ νδο $\lim a_n$ υπάρχει και ισούται με 1.

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$

$\rightsquigarrow \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\to e$

$\rightsquigarrow \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}\to \sqrt{e}$

Υπακολουθίες

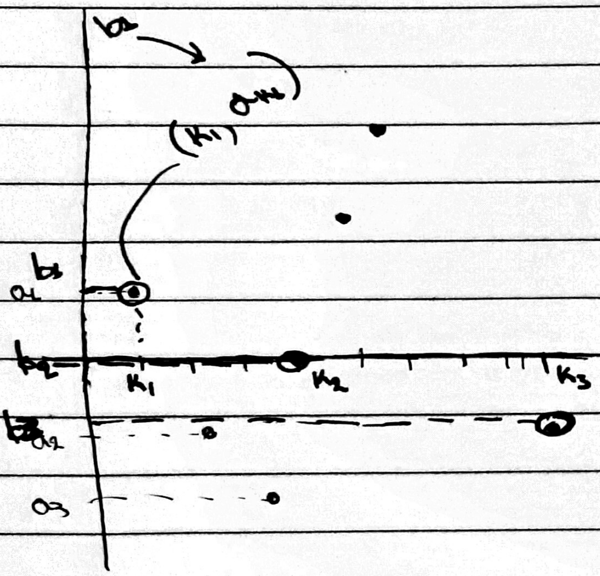
Ορισμός: Έστω (a_n) μια ακολουθία θεωρούμε μια αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων την οποία

No. Date

Συμβολίζω με $(k_n)^{\in \mathbb{N}}$. Επειδή τα $k_n \in \mathbb{N}$ το κάθε a_{k_n} είναι προφανώς ένας όρος της ακολουθίας a_n

[Σημείωση: $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$a(n)$
$k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$]

Το $a_{k_n} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι μια καινούρια ακολουθία που οι όροι της είναι κάποιοι από τους όρους της ακολουθίας (a_n)



Π.Χ. Αν (a_n) είναι μια οποιαδήποτε ακολουθία, τότε δύο συνηθισμένες υπακολουθίες
- Η ακολουθία των άρτιων δεικτών $a_2, a_4, \ldots\ldots (a_{2n})$
- Η ακολουθία των περιττών δεικτών $a_1, a_3, \ldots\ldots (a_{2n-1})$